VAKANTIECURSUS 2013

Gert de Kleuver

Afgelopen jaar bezocht Gert de Kleuver als vanouds de vakantiecursus. Onderwerp: *Wiskunde in wording*, over de vermoedens en stellingen die nog steeds tot de verbeelding van velen spreken. Laat u door hem bijpraten over stellingen die een miljoen opleveren als ze opgelost worden.

Dit jaar ben ik in Amsterdam geweest bij de vakantiecursus. In totaal hebben zo'n 130 mensen gebruikgemaakt van de mogelijkheid om het nieuwe schooljaar te starten met een cursus die er wat toe doet. In Amsterdam is er een boekentafel, dit keer verzorgd door Uitgeverij Epsilon. Gelukkig hebben ook dit jaar weer veel deelnemers gebruikgemaakt van deze service om een goed en mooi wiskundeboek te kopen.

Het vrijdagprogramma zag er als volgt uit:

- Welkom door Prof. Dr. Jan Wiegerinck
- Het $3n + 1$-vermoeden door Dr. Benne de Weger
- Het vermoeden van Birch & Swinnerton–Dyer door Prof. Dr. Jaap Top
- Navier–Stokes door Prof. Dr. Ir. Barry Koren
- De status van het P versus NP-probleem door Prof. Dr. Harry Buhrman

Zaterdag was een speciale dag over het vermoeden van Poincaré, dat tien jaar geleden bewezen werd door Perelman. Zo werden wij als cursisten bij de hand genomen door Prof. Dr. Ferdinand Verhulst, die een inleiding gaf over Poincaré. Daarna volgde Dr. Roland van der Veen met een korte inleiding, en geassisteerd door enkele studenten zijn alle bezoekers tot het einde tot aan het werk geweest met zeer interessante opdrachten. Daarover straks meer.

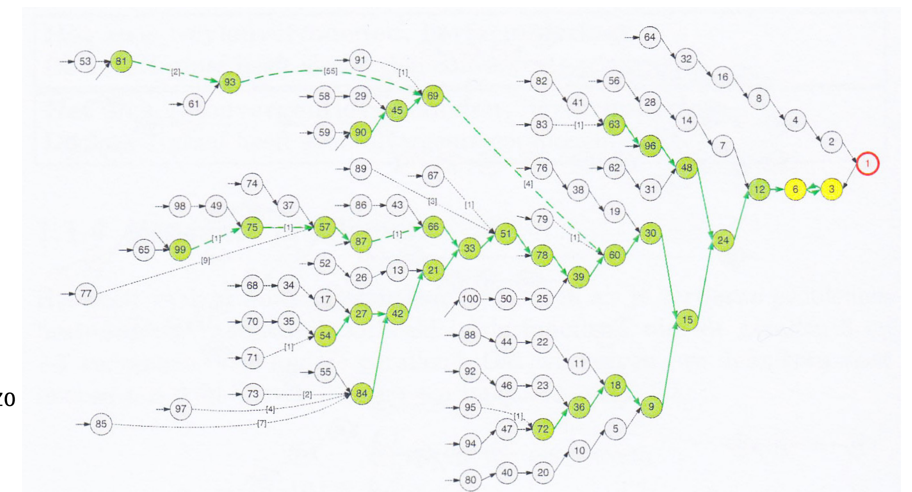
Voor het eerst was de syllabus in kleur uitgevoerd. Een hele verbetering omdat bij ingewikkelde tekeningen en figuren de kleuren duidelijker overkomen. Platform Wiskunde Nederland (PWN), dat de laatste jaren de organisatie op zich genomen heeft, maakte er echt iets moois van.

Hoe enthousiast kun je zijn over deze tweedaagse cursus? Als je niet geweest bent, heb je echt iets geweldigs gemist. Echt waar! Voorgaande jaren pakte ik er altijd een of twee lezingen uit die extra in het zonnetje gezet werden. Dit jaar is dat heel lastig omdat het allemaal geweldige lezingen waren. Ik ga een poging wagen:

Als eerste Benne de Weger met het $3n + 1$-vermoeden dat ook wel als het vermoeden van Collatz, van Hasse, van Kakutani, van Ulam, als het Syracuse-vermoeden en als het '*hailstone*'-vermoeden bekend staat. Ionica Smeets noemde het in 2010 tijdens de vakantiecursus een wel heel gênant probleem, omdat het op feestjes makkelijk aan leken uit te leggen is, maar dat al die slimme wiskundigen zo'n ogenschijnlijk makkelijk probleem nog steeds niet hebben kunnen oplossen… Hebt u nu al een vermoeden wat het $3n + 1$-vermoeden is? Een korte populaire omschrijving die zo in een klas gebruikt kan worden: Neem een natuurlijk getal in gedachten. Als het even is, deel het door 2. Als het oneven is, vermenigvuldig het met 3 en tel er 1 bij op. Met de uitkomst doe je hetzelfde, net zolang tot je een patroon herkent. Omdat voor een oneven n het volgende getal $3n + 1$ altijd even is, is de daaropvolgende stap altijd delen door 2. Deze twee stappen nemen we daarom tot één stap. Het hierboven beschreven proces is dan vanuit startwaarde n te itereren van de zogeheten $3n + 1$-functie:

$$T(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{als } n \text{ even} \\ \frac{1}{2}(3n+1) & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

Dit iteratieproces kunnen we noteren met pijlen, bijvoorbeeld:
$6 \to 3 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 2 \to \ldots$
Je kunt nu de k –de iteratie van n onder de functie T noteren als $T^k(n)$.
Ga maar na dat nu geldt: $T^7(7) = 5$.
Populair gezegd: het $3n + 1$-vermoeden zegt dat bij iedere positieve n op den duur zal eindigen in een cirkeltje van cijfers, volgens De Weger in zijn aankondiging een volstrekt nutteloos probleem waar een verbazingwekkende hoeveelheid onderzoek naar verricht is. Het heeft nog niet geleid tot een oplossing. Ik heb pagina 8 en 9 van de syllabus gescand om de cirkelberekening en het effect van kleur in de syllabus te laten zien, zie figuur 1 en 2. De Weger heeft veel nadruk gelegd op het beginstuk van zijn samenvatting van de lezing in de syllabus en kwam niet zo ver met zijn bespreking. Niet zo erg, want wat er gezegd werd, was zeer de moeite waard.



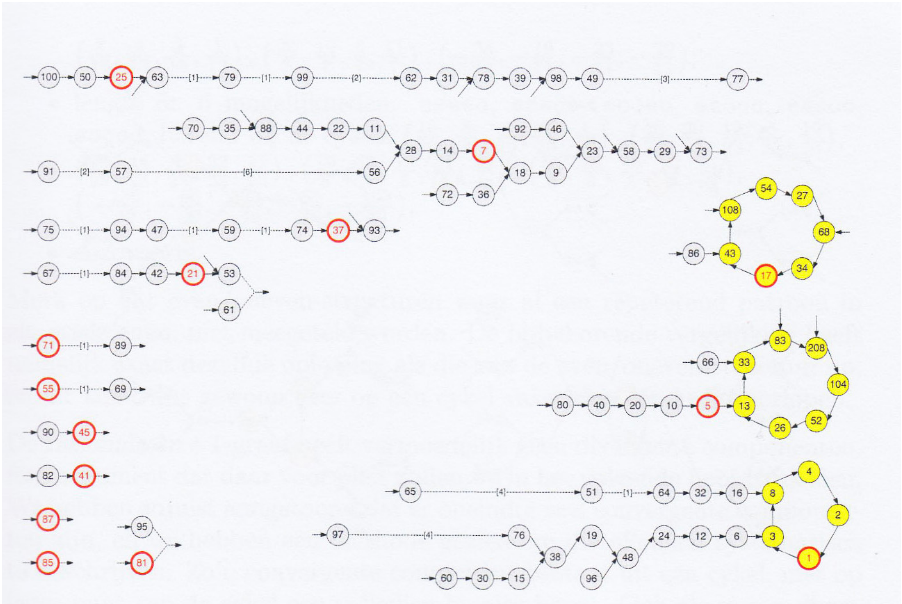
figuur 1 Graaf van $3n+3$

Jaap Top gaf een heel mooie presentatie over het vermoeden van Birch & Swinnerton-Dyer. Dit vermoeden is ongeveer vijftig jaar oud. In zijn lezing nam Top het publiek met een heel plezierige manier van presenteren mee naar toch wel 'lastige' wiskunde.
Een echt versimpelde versie van de vraag die Birch en Swinnerton-Dyer probeerden te beantwoorden, is de volgende: neem een polynoom $F(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$ en b, c, d rationale getallen. Bestaan er nu rationale getallen r zodat $F(r)$ een kwadraat is (dat wil zeggen, $F(r) = s^2$ voor zeker rationaal getal s). En zo ja? Zijn er eindig veel, of zelfs oneindig veel zulke r? Top ging met kleine stapjes aan de gang en liet zien hoe Euler en Fermat met enorme rationale getallen een methode hadden zodat $F(r)$ een kwadraat is. Birch en Swinnerton-Dyer gingen aan de slag met priemgetallen. Met de moderne hulpmiddelen zijn we alweer verder gekomen, maar het is nog niet klaar. Enkele resultaten zijn genoemd. Het voert echt te ver om dat hier allemaal te beschrijven. Misschien een idee om de syllabus aan te schaffen?

Als laatste wil ik het zaterdagprogramma noemen. Verhulst hield een inleiding over Poincaré, een stukje geschiedenis met mooie en duidelijke uitleg. Daarna nam Van der Veen het over. In de syllabus staan figuren in kleur waar de cursisten aan hebben gerekend. Het was heel prettig dat er studenten aanwezig waren om ons te helpen bij het oplossen van de vraagstukken. Zo makkelijk was het allemaal niet. Ik heb een opgave gescand en bijgevoegd; kunt u thuis ook nog even aan de slag, zie figuur 3 en 4.

Conclusie

Een zeer geslaagde vakantiecursus die ons wiskunde aanbood waar we meestal tijdens het schooljaar niet aan toekomen, maar die zeer inspirerend was om eens wat verder te kijken dan het schoolboek.



figuur 2 Graaf van $5n+1$

Over de auteur

Gert de Kleuver is docent op het Ichthus College te Veenendaal en penningmeester van de NVvW.
E-mailadres: *penningmeester@nvvw.nl*

Opgaven bij het vormen van ruimte:
van Poincaré tot Perelman

Roland van der Veen

Inleiding

Deze reeks opgaven is bedoeld voor de werkcolleges van de vakantiecursus *Wiskunde in Wording*, Augustus 2013.

1 Topologie

Poincaré dacht na over ruimtelijke objecten, *oppervlakken*, die worden gevormd door driehoeken aan elkaar te plakken. Hierbij ging het hem niet om de precieze details van hoeken en lengten maar om de globale vorm, de *topologie*. Welke oppervlakken lijken op elkaar en welke helemaal niet en hoe bewijs je dat?

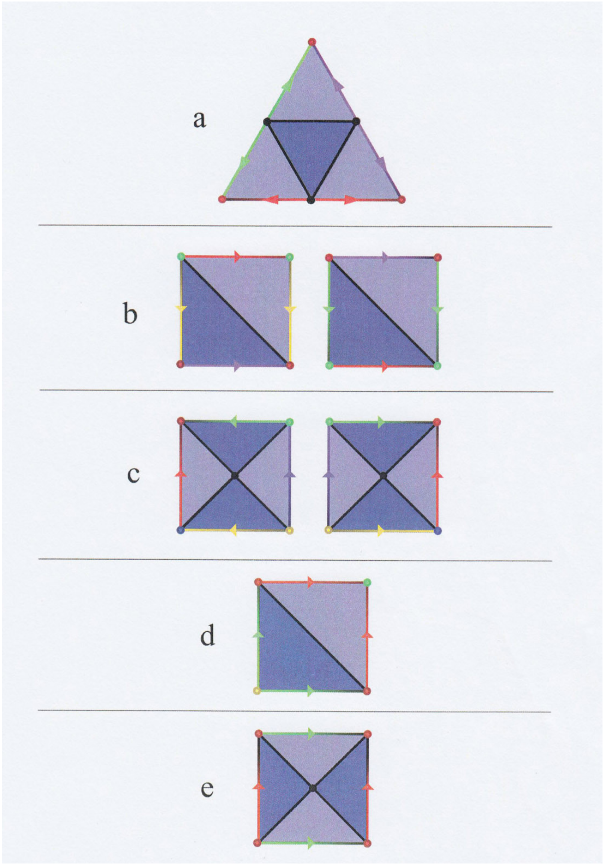
Om zulke vragen te beantwoorden gebruikte Poincaré het zogenaamde *Eulergetal*. Het Eulergetal χ (chi) kun je eenvoudig berekenen door het aantal punten V (*vertices*), het aantal zijden E (*edges*) en het aantal driehoeken F (*faces*) te tellen. Het Eulergetal is dan $\chi = V - E + F$.

1.1 Opgave bouwplaten

Hieronder staan bouwplaten voor vijf oppervlakken. Iedere bouwplaat bestaat uit een aantal driehoeken waarvan de zijden met dezelfde kleur volgens de pijltjes aan elkaar vast moeten zitten. De punten die dezelfde kleur hebben komen ook op elkaar terecht en vormen dus samen één hoekpunt. Bouwplaat b bestaat bijvoorbeeld uit twee losse stukken van twee driehoeken elk die volgens de instructies uiteindelijk allemaal aan elkaar komen te zitten. Uiteindelijk blijven er twee punten en zes zijden (ribben) over.

a. Bereken van elk van de vijf oppervlakken het Eulergetal.
b. Schets zo goed mogelijk hoe het figuur er uit komt te zien wanneer we de pijltjes daadwerkelijk aan elkaar vast zouden plakken. Hierbij zullen de rechte lijnen en vlakken noodzakelijk vervormd moeten worden. Dat is geen probleem, dat is nu juist topologie!
c. Zie je een verband tussen het Eulergetal en de globale vorm van je schetsen?

figuur 3



figuur 4